Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 39

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

March 22, 2020

1 Calcular $[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}]$

Usando las definiciones

$$M^{0a} = K^a, \qquad M^{ab} = \varepsilon^{abc} J^c \tag{1}$$

queremos comprobar que los conmutadores

$$\left[K^a, K^b\right] = -\varepsilon^{abc} J^c, \qquad \left[J^a, J^b\right] = \varepsilon^{abc} J^c, \qquad \left[J^a, K^b\right] = \varepsilon^{abc} K^c, \tag{2}$$

son equivalentes al conmutador

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} \tag{3}$$

Vamos a empezar entonces comprobando el caso $\mu = \nu$, por una parte $M^{\mu\mu} = 0$, por lo que el conmutador (3) debería ser cero;

$$[M^{\mu\mu}, M^{\rho\sigma}] = \cancel{g^{\mu\rho} M^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} M^{\mu\sigma}} - \cancel{g^{\mu\sigma} M^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} M^{\mu\rho}} = 0$$

Confirmando así el resultado. Debido a la propiedad de los conmutadores $[A, B] = -[B, A]$, el caso $\rho = \sigma$ se cumple trivialmente.

Antes de continuar, notemos que, debido a la propiedad $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$, podemos suponer que $\mu < \nu$ y $\rho < \sigma$. Además, debido a la propiedad $[A, B] = -[B, A]$ podemos suponer que $\mu \leq \rho$. Vamos ahora a comprobar el caso $\mu = \rho = 0$, $\nu = a$ y $\sigma = b$, con $a, b > 0$. Por un lado, usando las ecuaciones (1) y (2)

$$\left[M^{0a}, M^{0b}\right] = \left[K^a, K^b\right] = -\varepsilon^{abc} J^c$$

Mientras por el otro lado, usando (1) y (3)

$$\left[M^{0a}, M^{0b}\right] = \cancel{g^{a0}} M^{0b} - g^{00} M^{ab} - g^{ab} \cancel{M^{00}} + \cancel{g^{0b}} M^{a0} = -M^{ab} = -\varepsilon^{abc} J^c$$

En concordancia con lo que queríamos ver; en el caso $\mu = 0$, $\nu = a$, $\rho = b$ y $\sigma = c$ tenemos, usando (2)

$$\begin{aligned}\left[M^{0a}, M^{bc}\right] &= \varepsilon^{bcd}\left[K^a, J^d\right] = \varepsilon^{bcd}\varepsilon^{ade} K^e = \varepsilon^{dbc}\varepsilon^{dea} K^e \\ &= \left(\delta^{be}\delta^{ac} - \delta^{ab}\delta^{ce}\right) K^e = \delta^{ac} K^b - \delta^{ab} K^c \equiv 2\delta^{a[c} K^{b]}\end{aligned}$$

Donde he usado la identidad[1] $\varepsilon^{dbc}\varepsilon^{dea} = \left(\delta^{be}\delta^{ac} - \delta^{ab}\delta^{ce}\right)$ y he introducido la notación $T^{[\mu\nu]} \equiv \frac{1}{2}\left(T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}\right)$

Y, usando (3)

$$\begin{aligned}\left[M^{0a}, M^{bc}\right] &= g^{ab} M^{0c} - g^{0b} M^{ac} - g^{ac} M^{0b} + g^{0c} M^{ab} \\ &= -\delta^{ab} K^c + \delta^{ac} K^b = 2\delta^{a[c} K^{b]}\end{aligned}$$

Finalmente, solo queda verificar el caso $\mu = a$, $\nu = b$, $\rho = c$ y $\sigma = d$ donde, por una parte tenemos

$$\begin{aligned}\left[M^{ab}, M^{cd}\right] &= \varepsilon^{abe}\varepsilon^{cdf}\left[J^e, J^f\right] = \varepsilon^{abe}\varepsilon^{cdf}\left[J^e, J^f\right] = \varepsilon^{abe}\varepsilon^{cdf}\varepsilon^{efg} J^g \\ &= -\varepsilon^{abe}\left(\varepsilon^{fcd}\varepsilon^{feg}\right) J^g = -\varepsilon^{abe}\left(\delta^{ce}\delta^{dg} - \delta^{cg}\delta^{de}\right) J^g \\ &= -\left(\varepsilon^{abc} J^d - \varepsilon^{abd} J^c\right) = -2\varepsilon^{ab[c} J^{d]}\end{aligned}$$

[1] Ver Apéndice.

Y por otra parte

$$\begin{aligned}
\left[M^{ab}, M^{cd}\right] &= g^{bc}M^{ad} - g^{ac}M^{bd} - g^{bd}M^{ac} + g^{ad}M^{bc} \\
&= -\left(\delta^{bc}\delta^{ae} - \delta^{ac}\delta^{be}\right)M^{ed} + \left(\delta^{bd}\delta^{ae} - \delta^{ad}\delta^{be}\right)M^{ec} \\
&= -\varepsilon^{abf}\varepsilon^{ecf}M^{ed} + \varepsilon^{abf}\varepsilon^{edf}M^{ec} \\
&= -\varepsilon^{abf}\varepsilon^{ecf}\varepsilon^{edg}J^g + \varepsilon^{abf}\varepsilon^{edf}\varepsilon^{ecg}J^g \\
&= -\varepsilon^{abf}\left(\delta^{cd}\delta^{fg} - \delta^{cg}\delta^{fd}\right)J^g + \varepsilon^{abf}\left(\delta^{dc}\delta^{fg} - \delta^{dg}\delta^{fc}\right)J^g \\
&= \varepsilon^{abd}J^c - \varepsilon^{cab}J^d = -2\varepsilon^{ab[c}J^{d]}
\end{aligned}$$

Confirmando así que el conmutador (3) es correcto.

2 Calcular $\left(M^{\mu\nu}\right)^{\alpha}{}_{\beta}$

De nuevo, queremos comprobar que

$$\left(M^{\mu\nu}\right)^{\alpha}{}_{\beta} = g^{\mu\alpha}\delta^{\nu}{}_{\beta} - g^{\nu\alpha}\delta^{\mu}{}_{\beta}$$

Primero comprobamos el caso $\mu = \nu$

$$\left(M^{\mu\mu}\right)^{\alpha}{}_{\beta} = g^{\mu\alpha}\delta^{\mu}{}_{\beta} - g^{\mu\alpha}\delta^{\mu}{}_{\beta} = 0$$

como esperábamos, ahora consideremos el caso $\mu = 0$, $\nu = a$

$$\left(M^{0a}\right)^{\alpha}{}_{\beta} = \left(K^{a}\right)^{\alpha}{}_{\beta} = \delta^{0\alpha}\delta^{a}{}_{\beta} + \delta^{a\alpha}\delta^{0}{}_{\beta}$$

El primer término nos dice que en la primera fila ($\alpha = 0$) solo hay un 1 cuando en la columna dada por $\beta = a$, mientras que el segundo término nos dice que en la primera columna solo hay un 1 en la fila $\alpha = a$, cualquier otro término es 0. Notemos además que $\delta^{0\alpha} = g^{0\alpha}$ y $\delta^{a\alpha} = -g^{a\alpha}$, por lo tanto

$$\left(M^{0a}\right)^{\alpha}{}_{\beta} = g^{0\alpha}\delta^{a}{}_{\beta} - g^{a\alpha}\delta^{0}{}_{\beta}$$

Para el caso $\mu = a$, $\nu = b$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left(M^{ab}\right)^{\alpha}{}_{\beta} &= \varepsilon^{abc}\left(J^{c}\right)^{\alpha}{}_{\beta} = \varepsilon^{abc}\left(-\varepsilon^{cde}\delta^{d\alpha}\delta^{e}{}_{\beta}\right) = -\left(\delta^{ad}\delta^{be} - \delta^{ae}\delta^{bd}\right)\delta^{d\alpha}\delta^{e}{}_{\beta} \\
&= -\delta^{a\alpha}\delta^{b}{}_{\beta} + \delta^{b\alpha}\delta^{a}{}_{\beta} = g^{a\alpha}\delta^{b}{}_{\beta} - g^{b\alpha}\delta^{a}{}_{\beta}
\end{aligned}$$

Juntando todos los casos obtenemos el resultado que queríamos.

A $\varepsilon^{dbc}\varepsilon^{dea} = \delta^{be}\delta^{ac} - \delta^{ab}\delta^{ce}$

Para demostrar esta identidad notemos que, para que ε^{abc} sea distinta de cero no puede tener ningún índice repetido, al tener tres índices que pueden valer 1, 2 o 3, esto es equivalente a decir que los índices de ε^{abc} debe tomar todos los valores posibles exactamente una vez, (es decir, que deberá haber un único 1, un único 2 y un único 3). Por esta razón, si queremos que el producto $\varepsilon^{dbc}\varepsilon^{dea}$ sea distinto de cero se debe cumplir que $a = d$, $a = b$ o $a = c$, el primer caso lo descartamos porqué la segunda ε se anula, por lo tanto solo quedan dos casos, si $a = b$, entonces $e = c$ y si $a = c$ entonces $e = b$, por lo tanto el producto debe tener la forma

$$\varepsilon^{dbc}\varepsilon^{dea} = A\delta^{ab}\delta^{ce} + B\delta^{ac}\delta^{be}$$

La parte izquierda es antisimétrica respecto al intercambio $b \leftrightarrow c$, por lo que

$$A\delta^{ab}\delta^{ce} + B\delta^{ac}\delta^{be} = -A\delta^{ac}\delta^{be} - B\delta^{ab}\delta^{ce} \Longrightarrow A + B = 0$$

Por lo que queda

$$\varepsilon^{dbc}\varepsilon^{dea} = A\left(\delta^{ab}\delta^{ce} - \delta^{ac}\delta^{be}\right)$$

Evaluando el caso $a = c = 3$, $b = e = 2$ tenemos

$$\varepsilon^{d23}\varepsilon^{d23} = \varepsilon^{123}\varepsilon^{123} + \varepsilon^{223}\varepsilon^{223} + \varepsilon^{323}\varepsilon^{323} = 1$$

$$A\left(\delta^{32}\delta^{32} - \delta^{33}\delta^{22}\right) = -A$$

Por lo tanto debe cumplirse $A = -1$ y queda

$$\varepsilon^{dbc}\varepsilon^{dea} = \delta^{ac}\delta^{be} - \delta^{ab}\delta^{ce}$$